V. Genauere Rechnungsmethoden.

1. Vergleich von Näherungsformeln.

In den obigen Zahlenbeispielen sind die Größtmomente in den Holmen errechnet nach der Formel

$$M = M_0 \cdot \frac{n}{n-1}.$$

Es sei hier noch nachgetragen, daß für das einfache Biegungsmoment M_0 für die Längskraft und Belastung die erforderlichen Endwerte einzusetzen sind, d. h. bei verlangter fünffacher Sicherheit die fünffachen Werte, bei dreifacher Sicherheit die dreifachen usf. Man erhält nämlich nicht dasselbe Resultat bei Einsetzung der einfachen Werte und nachträglichem Multiplizieren des Sicherheitsgrades mit fünf bzw. drei. Zurückzuführen ist diese Erscheinung auf den Quotienten $\frac{n}{n-1}$, der beim geradlinigen Wachsen von n ungleichmäßig abnimmt.

Bei den Holmberechnungen ist auf diesen Umstand auch stets Rücksicht genommen worden.

Eine ähnliche Formel wie diejenige von Vianello gibt Reißner in dem schon mehrfach erwähnten Vortrag „Beanspruchung und Sicherheit von Flugzeugen". Sie lautet:

$$M = M_0 \cdot (1 + \tfrac{1}{3} n).$$

Der Faktor mit dem Sicherheitsgrad n hat hier jedoch eine andere Zusammensetzung.

Um die beiden Formeln miteinander vergleichen zu können, sind ihre Zahlenwerte tabellarisch zusammengestellt, indem der Sicherheitsgrad n nacheinander die Werte 1—10 durchläuft.

n	$M = M_0 \cdot \frac{n}{n-1}$	$M = M_0 (1 + \frac{1}{3} n)$
1	$M = M_0 \cdot \infty$	$M = 1{,}33\ M_0$
2	„ $= 2\ M_0$	„ $= 1{,}165$ „
3	„ $= 1{,}5$ „	„ $= 1{,}111$ „
4	„ $= 1{,}33$ „	„ $= 1{,}08$ „
5	„ $= 1{,}25$ „	„ $= 1{,}065$ „
6	„ $= 1{,}20$ „	„ $= 1{,}055$ „
7	„ $= 1{,}165$ „	„ $= 1{,}045$ „
8	„ $= 1{,}14$ „	„ $= 1{,}04$ „
9	„ $= 1{,}125$ „	„ $= 1{,}035$ „
10	„ $= 1{,}11$ „	„ $= 1{,}03$ „

Die Vianellosche Formel gibt für das Gesamtmoment M stets größere Werte und zwar besonders für n in den Grenzen 1—5, d. h. dort, wo die Formel hauptsächlich Verwendung findet. Aus Sicherheitsgründen würde demnach die erstere vorzuziehen sein, so weit es sich um die Anwendung der Formel auf den Holm als mehrfach gestützten Träger handelt, für dessen Behandlung beide Formeln streng genommen nicht zutreffen.

Ähnlich berechnet auch Professor Kayser, Darmstadt, den Druckstab. (Siehe Zentralblatt der Bauverwaltung Nr. 19, S. 12, Jahrgang 1912.)

Maßgebend ist dort ebenfalls das biegende Moment. Ist $R = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$ die Knicklast, P die Druckkraft, f_0 die Durchbiegung, F der Querschnitt und W das Widerstandsmoment, so lautet die Kaysersche Formel

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{R}{R-P} \cdot f_0 \cdot \frac{P}{W}.$$

Dieselbe hat die Form $\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}$ und zwar ist

$$M = \frac{R}{R-P} \cdot f_0 \cdot P = \frac{1}{1 - \frac{P}{R}} \cdot f_0 \cdot P.$$

Schreibt man die Gleichung in der Form

$$M = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \cdot M_0 = M_0 \cdot \frac{n}{n-1},$$

denn $\frac{R}{P}$ ist der Sicherheitsgrad gegen Ausknicken, so ist auch hier das einfache Moment mit dem Faktor $\frac{n}{n-1}$ vervielfacht, nur daß das Moment M_0 hier von der Druckkraft P herrührt, weil der Stab nicht durch Kräfte senkrecht zur Achse beansprucht wird.

Alle diese Formeln behandeln jedoch den zweifach gestützten Stab, nicht den mehrfach gestützten. In ihnen sind also die Einflüsse der Stützmomente nicht berücksichtigt. Sie können demnach für die Holmberechnung nur einen bedingten Wert haben. Der durch die Stützmomente hervorgerufenen Entlastung der einfachen Feldmomente ist insofern in unseren Beispielen Rechnung getragen, als für M_0 stets das resultierende Feldmoment eingesetzt wurde.

2. Die Clapeyronschen Gleichungen.

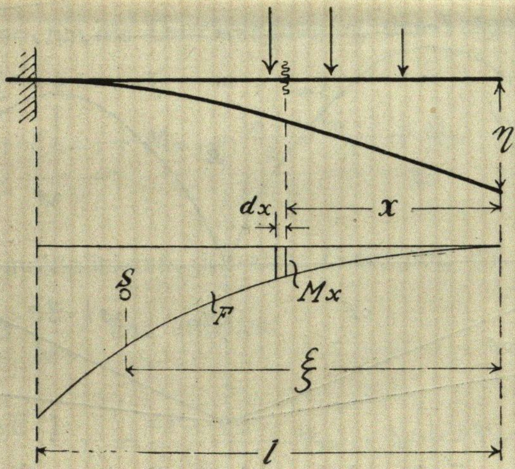
Im Abschnitte „Statische Grundlagen“ wurden die Gleichungen von Clapeyron einfach in ihrer Endform gegeben und dadurch in ihrem ganzen Aufbau gewissermaßen als bekannt vorausgesetzt. Zur besseren Einführung in das Wesen der Gleichung und zur Vervollständigung wird in den folgenden Zeilen ihre Ableitung durchgeführt.

Die Durchbiegung eines an dem einen Ende eingespannten, beliebig belasteten Freiträgers berechnet sich nach der Formel

$$\eta = \frac{F \cdot \xi}{E \cdot J}.$$

Darin bedeutet F den Inhalt der Momentenfläche des Trägers, ξ den Abstand des Schwerpunktes dieser Momenten-

Fig. 73.



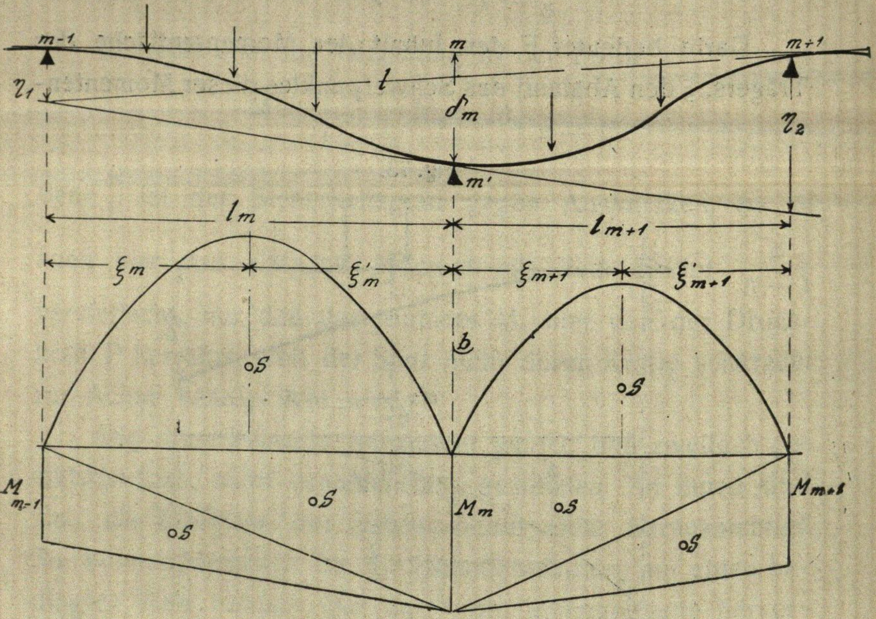
fläche vom freien Trägerende. Der Ausdruck $F \cdot \xi$ stellt also das statische Moment der Momentenfläche in bezug auf das freie Trägerende dar und ist identisch mit $\int_0^l M_x \cdot x \cdot dx$, weshalb man die Formel auch schreiben kann

$$\eta = \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_0^l M_x \cdot x \cdot dx.$$

Aus einem Träger auf beliebig vielen Stützen mit beliebigen Feldweiten und beliebiger Belastung denken wir uns zwei aneinander grenzende Felder herausgeschnitten.

Der Träger habe sich unter dem Einfluß der Belastung deformiert. Wir denken uns den durchgebogenen Träger bei m′ eingespannt und zeichnen in m′ die Tangente an die

Fig. 74a und 74b.



Trägerachse. Sodann habe sich der Punkt (m — 1) von der Tangente entfernt um die Strecke η_1 der Punkt (m + 1) um die Strecke η_2. Oder auch, anders ausgedrückt, der Träger von der Stützweite l_m habe sich um η_1 durchgebogen, der Träger von der Stützweite l_{m+1} um η_2. Da wir es hier mit einem Träger auf mehreren Stützen zu tun haben, erzeugt die Belastung in jedem Punkte, also auch bei den abgestützten, Biegungsmomente. Die zugehörigen Momentenflächen F_m und F_{m+1}, sowie die Stützmomente M_{m-1}, M_m, M_{m+1} seien aufgetragen und zwar der besseren Übersicht wegen nach verschiedenen Seiten.

Ferner seien festgelegt die Schwerpunkte der einzelnen Teilflächen und ihre Abstände von den Feldenden.

Wir betrachten den Träger von der Stützweite l_m und drücken seine Durchbiegung η_1 am Ende aus durch die statischen Momente der zugehörigen Momentenflächen gemäß der einleitenden Formel. Es ist

$$\eta_1 = \frac{F_m \cdot \xi_m + M_{m-1} \cdot \frac{l_m}{2} \cdot \frac{l_m}{3} + M_m \cdot \frac{l_m}{2} \cdot \frac{2}{3} l_m}{E \cdot J}.$$

Ebenso für die Durchbiegung η_2 des Trägers von der Stützweite l_{m+1}

$$\eta_2 = \frac{F_{m+1} \cdot \xi'_{m+1} + M_{m+1} \cdot \frac{l_{m+1}}{2} \cdot \frac{l_{m+1}}{3} + M_m \cdot \frac{l_{m+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} l_{m+1}}{E \cdot J}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $\frac{6E \cdot J}{l_m}$, die zweite mit $\frac{6E \cdot J}{l_{m+1}}$ und erhalten:

$$\frac{6E \cdot J}{l_m} \cdot \eta_1 = \frac{6F_m \cdot \xi_m}{l_m} + M_{m-1} \cdot l_m + 2M_m \cdot l_m$$

$$\frac{6E \cdot J}{l_{m+1}} \cdot \eta_2 = \frac{6F_{m+1} \cdot \xi'_{m+1}}{l_{m+1}} + M_{m+1} \cdot l_{m+1} + 2M_m \cdot l_{m+1}$$

$$6E \cdot J \cdot \left(\frac{\eta_1}{l_m} + \frac{\eta_2}{l_{m+1}}\right) - \frac{6F_m \cdot \xi_m}{l_m} - \frac{6F_{m+1} \cdot \xi'_{m+1}}{l_{m+1}}$$
$$= M_{m-1} \cdot l_m + 2M_m \cdot (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} \cdot l_{m+1}.$$

Die rechte Seite der Gleichung, auf der sich jetzt nur die Stützmomente in Verbindung mit den Stützweiten befinden, bezeichnen wir mit N_m, so daß übrig bleibt:

$$N_m = 6E \cdot J \cdot \left(\frac{\eta_1}{l_m} + \frac{\eta_2}{l_{m+1}}\right) - \frac{6F_m \cdot \xi_m}{l_m} - \frac{6F_{m+1} \cdot \xi'_{m+1}}{l_{m+1}}.$$

In Fig. 74a bezeichne δ_m die Senkung der Stütze *m* gegen die Verbindungslinie der beiden Nachbarstützen. Durch Zeichnen der Hilfslinie *l* wird δ_m in zwei Teile zerlegt, deren Summe ausgedrückt wird durch:

$$\delta_m = \frac{\eta_1 \cdot l_{m+1}}{l_m + l_{m+1}} + \frac{\eta_2 \cdot l_m}{l_m + l_{m+1}}.$$

Damit läßt sich der Klammerwert bei $6E \cdot J$ auf der rechten Seite der Gleichung von N_m auch schreiben:

$$\frac{\eta_1}{l_m} + \frac{\eta_2}{l_{m+1}} = \frac{\eta_1 \cdot l_{m+1} + \eta_2 \cdot l_m}{l_m \cdot l_{m+1}} = \frac{\delta_m \cdot (l_m + l_{m+1})}{l_m \cdot l_{m+1}}.$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$N_m = -\frac{6F_m \cdot \xi_m}{l_m} - \frac{6F_{m+1} \cdot \xi'_{m+1}}{l_{m+1}} + 6E \cdot J \cdot \delta_m \cdot \frac{l_m + l_{m+1}}{l_m \cdot l_{m+1}}.$$

Sind alle Felder belastet, so tragen sämtliche Stützmomente negatives Vorzeichen. Die Gleichung wird daher besser in der Form geschrieben:

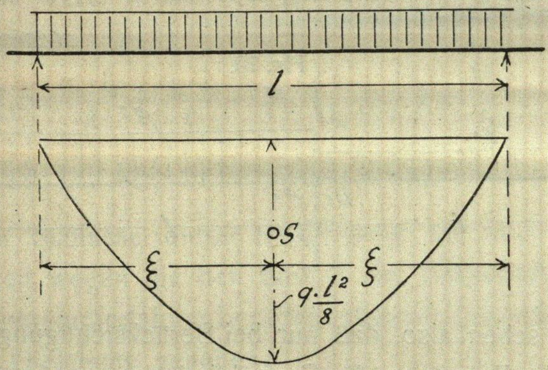
$$N_m = \frac{6F_m \cdot \xi_m}{l_m} + \frac{6F_{m+1} \cdot \xi'_{m+1}}{l_{m+1}} - 6E \cdot J \cdot \delta_m \cdot \frac{l_m + l_{m+1}}{l_m \cdot l_{m+1}}.$$

Der Wert N_m, d. h. der kürzere Ausdruck für die linke Seite der Gleichung mit den Stützmomenten ist also nur abhängig von den Momentenflächen der einfachen Balken und von der Stützensenkung δ_m. Sind die Stützen starr, also unbeweglich und fest, so tritt keine Senkung der Stützen ein. Der Wert δ_m wird 0 und die Gleichung schreibt sich einfach:

$$N_m = \frac{6 F_m \cdot \xi_m}{l_m} + \frac{6 F_{m+1} \cdot \xi'_{m+1}}{l_{m+1}}.$$

Im Flugzeugbau spielt nur die gleichförmig verteilte Belastung eine Rolle. Der Wert $F_m \cdot \xi_m$ bei gleichmäßiger Belastung ergibt sich wie folgt (Fig. 75):

Fig. 75.



Stützweite = l m.

Belastung = q pro lfd. m.

Größtordinate der Momentenfläche in Mitte $= q \cdot \frac{l^2}{8}$.

$$F = \tfrac{2}{3} \cdot q \cdot \frac{l^2}{8} \cdot l = q \cdot \frac{l^3}{12}.$$

$$\xi = \frac{l}{2}; \quad F \cdot \xi = q \cdot \frac{l^4}{24}.$$

Mit diesem Werte erscheint die rechte Seite der Clapeyronschen Gleichung in der Form:

$$N_m = \frac{6 \cdot q_m \cdot l_m^4}{24\, l_m} + \frac{6\, q_{m+1} \cdot l_{m+1}^4}{24\, l_{m+1}} = \tfrac{1}{4} \cdot (q_m \cdot l_m^3 + q_{m+1} \cdot l_{m+1}^3).$$

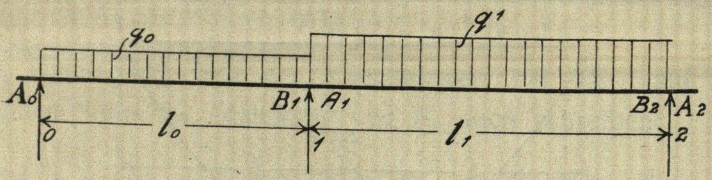
In dieser reduzierten Gestalt ist sie auch bei uns verwendet worden.

Aus der Ableitung geht hervor, daß folgende Bedingungen bei dieser kurzen Form erfüllt sein müssen:

1. Der Elastizitätsmodul E muß konstant sein.
2. Das Trägheitsmoment J „ „ „
3. Die Stützen müssen starr sein.
4. Einfluß der Temperaturschwankungen ist nicht berücksichtigt.

Von diesen vier Bedingungen ist nur die erste erfüllt.

Fig. 76.



Wir sehen also, daß nur bei Berücksichtigung des Einflusses der Belastung die Genauigkeit der errechneten Stützmomente keine strenge genannt werden kann.

Wir haben wieder zwei aneinander grenzende Felder von den Stützweiten l_0 und l_1, belastet mit den Einheitslasten q_0 und q_1. (Fig. 76.)

T_1 sei der Gesamtstützendruck über Stütze *1*. Er setzt sich zusammen aus B_1 dem Stützendruck des linken Feldes und A_1 dem Stützendruck des rechten Feldes.

Für das Biegungsmoment an irgendeiner Stelle x von der Stütze 1 ergibt sich:

$$M_x = M_1 - \frac{q_1 \cdot x^2}{2} + A_1 \cdot x$$

und für A_1:

$$A_1 = \frac{M_x - M_1}{x} + \frac{q_1 \cdot x}{2}.$$

An der Stelle *2*, d. h. für $x = l_1$ beträgt

$$A_1 = \frac{M_2 - M_1}{l_1} + \frac{q_1 \cdot l_1}{2}.$$

Ebenso würde man erhalten:

$$B_1 = \frac{M_0 - M_1}{l_0} + \frac{q_0 \cdot l_0}{2}.$$

Beide Werte setzen sich zu dem Gesamt-Stützendruck T_1 zusammen:

$$T_1 = \frac{q_0 \cdot l_0}{2} + \frac{q_1 \cdot l_1}{2} - M_1 \cdot \left(\frac{1}{l_0} + \frac{1}{l_1}\right) + \frac{M_0}{l_0} + \frac{M_2}{l_1}$$

d. h. zu der von uns verwendeten Gleichung.

Zum Schlusse dieser Betrachtung sei noch der Vollständigkeit wegen die den Einfluß der Stützensenkung und der Temperaturänderung berücksichtigende genauere Clapeyronsche Gleichung gegeben:

$$M_{m-1} \cdot l_m + 2\,M_m \cdot (l_m + l_{m+1}) + M_{m+1} \cdot l_{m+1}$$
$$= -\tfrac{1}{4} \cdot (q_m \cdot l_m^3 + q_{m+1} \cdot l_{m+1}^3) + 6\,E \cdot J\,\delta_m \cdot \frac{l_m + l_{m+1}}{l_m \cdot l_{m+1}}$$
$$+ 3\,E \cdot J \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t \cdot \frac{l_m + l_{m+1}}{h}.$$

Darin bezeichnen:

$-\tfrac{1}{4} \cdot (q_m \cdot l_m^3 + q_{m+1} \cdot l_{m+1}^3)$ den Einfluß gleichförmig verteilter Belastung,

$+ 6\,E \cdot J \cdot \delta_m \cdot \frac{l_m + l_{m+1}}{l_m \cdot l_{m+1}}$ den Einfluß der Stützensenkung,

$+ 3\,E \cdot J \cdot \alpha_t \cdot \Delta_t \cdot \frac{l_m + l_{m+1}}{h}$ den Einfluß d. Temperaturänderung.

Es sei hier noch bemerkt, daß bei Trägern, die auch durch Einzellasten beansprucht werden, noch ein Summenglied hinzukommt von der Form:

$$-\Sigma P_m \cdot x_m \cdot \frac{l_m^2 - x_m^2}{l_m} - \Sigma P_{m+1} \cdot x_{m+1} \cdot \frac{l_{m+1}^2 - x_{m+1}^2}{l_{m+1}}.$$

Entsprechend auch in der Gleichung für den Stützendruck:

$$+\Sigma \frac{P_1 \cdot x_1}{l_1} + \Sigma \frac{P_0 \cdot x_0}{l_0}.$$

3. Die Gleichungen Müller-Breslau's zur Berechnung des gebogenen und gedrückten Trägers auf mehreren Stützen.

Der mehrfach gestützte Holm im Flugzeugbau hat Ähnlichkeit mit der Gurtung eines Brückenfachwerks. Die gedrückte Gurtung eines solchen besteht aus einzelnen Druckstäben, die infolge ihres Eigengewichtes auch durch biegende Lasten senkrecht zur Achse belastet werden. Durch die Ausbildung der Knotenpunkte mit Knotenblechen und steifen vernieteten Anschlüssen entstehen Nebenspannungen infolge der an den Knoten auftretenden Einspannungsmomente. Bei der gezogenen Gurtung sind die Erscheinungen entsprechend dieselben.

Im zweiten Bande seiner graphischen Statik gibt Müller-Breslau bei der Untersuchung der Nebenspannungen genaue Formeln für die Berechnung solcher durch biegende Querkräfte, drückende oder ziehende Längskräfte und durch Einspannungsmomente beanspruchten Stäbe. Da die Belastungsverhältnisse bei den Holmen von Tragflächen genau die gleichen sind, so lassen sich diese Formeln hierauf ohne weiteres anwenden.

Der gebogene und gedrückte Stab.

Der Stab werde gedrückt durch die Längskraft S. An den Enden wirken die Einspannungsmomente M_A und M_B. Die gleichförmige Einheitslast betrage g, die Stützweite l.

Die Biegelinie habe in der Entfernung x vom Stabende die Ordinate y. Mit diesen Werten läßt sich das resultierende Biegungsmoment ausdrücken durch

$$M = M_A + \frac{M_B - M_A}{l} \cdot x + g\frac{l}{2} \cdot x - g\frac{x^2}{2} + S \cdot y.$$

Durch Auflösung der Differentialgleichung der elastischen Linie erhält man für die größte Durchbiegung y_{max} die Gleichung:

$$y_{max} = C_1 \cdot \cos\frac{x}{k} + C_2 \cdot \sin\frac{x}{k} - \frac{g \cdot k^2}{S}$$

$$-\frac{1}{S} \cdot \left(M_A + \frac{M_B - M_A}{l} \cdot x + g\frac{l \cdot x}{2} - g\frac{x^2}{2}\right).$$

Die Integrationskonstanten sind zu bestimmen durch:

$$C_1 = \frac{D_1}{S}$$

$$C_2 = \frac{1}{S} \cdot \left(\frac{D_2}{\sin\frac{l}{k}} - D_1 \cdot \operatorname{ctg}\frac{l}{k}\right).$$

Das resultierende Größtmoment ergibt sich schließlich zu:

$$M_{max} = \frac{D_1}{\cos\frac{x}{k}} + g\,k^2.$$

Diese Hauptgleichung ist jedoch nur brauchbar, sobald sich aus

$$\operatorname{tg}\frac{x}{k} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{1}{\sin\frac{l}{k}} - \operatorname{ctg}\frac{l}{k}$$

ein für x verwendbarer Wert ergibt, d. h. ein zwischen 0 und l liegender Zahlenwert. Im anderen Falle ist M_A oder M_B das maßgebende Größtmoment.

In seinen Entwicklungen hat Müller-Breslau die Ersatzwerte k, D_1 und D_2 durch folgende Gleichungen festgelegt:

$$k = \sqrt{\frac{EJ}{S}}$$

$$D_1 = M_A + g \cdot k^2; \quad D_2 = M_B + g \cdot k^2.$$

Bei der Anwendung vorstehender Gleichungen ist auf die Benennung der einzelnen Größen und ferner darauf zu achten, ob die Momente M_A und M_B den Stab im gleichen Sinne wie die Belastung g und das zugehörige Moment zu deformieren suchen, oder entgegengesetzt dazu.

Der gezogene Biegungsstab.

Die Benennung der einzelnen Größen ist wie vorher, nur bedeutet S hier die ziehende Längskraft, ferner wird die Einheitsbelastung g im entgegengesetzten Sinne der Durchbiegung positiv angenommen.

Die Entwicklung geht wieder aus von der Anfangsgleichung

$$M = M_A + \frac{M_B - M_A}{l} \cdot x - \left(g \frac{lx}{2} - g \frac{x^2}{2}\right) - S \cdot y.$$

Nach Auflösung der Differentialgleichung der elastischen Linie erhält man die größte Durchbiegung in der Form:

$$-y_{max} = C_1 \cdot \operatorname{Cos} \frac{x}{k} + C_2 \cdot \operatorname{Sin} \frac{x}{k} - \frac{1}{S} \cdot \left(M_A + \frac{M_B - M_A}{l} \cdot x - g \cdot \frac{lx}{2} + g \frac{x^2}{2} + g k^2\right).$$

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2:

$$C_1 = \frac{1}{S} \cdot D_1$$

$$C_2 = \frac{1}{S} \cdot \left(D_1 \cdot \operatorname{Cotang} \frac{l}{k} - \frac{D_2}{\operatorname{Sin} \frac{l}{k}}\right).$$

Das resultierende Größtmoment ergibt sich hier zu:

$$M_{max} = \frac{D_1}{\operatorname{Cos}\frac{x}{k}} + g \cdot k^2.$$

Voraussetzung ist wieder, daß sich aus:

$$\operatorname{Tang}\frac{x}{k} = \operatorname{Cotang}\frac{l}{k} - \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{l}{k}}$$

für x ein zwischen 0 und l liegender Wert ergibt.

Die Abkürzungen bedeuten hier wieder:

$$k = \sqrt{\frac{E \cdot J}{S}}$$

$$D_1 = M_A + g \cdot k^2; \quad D_2 = M_B + g \cdot k^2.$$

Während man es bei dem Druckstab nur mit Kreisfunktionen zu tun hat, treten bei dem Zugstab Hyperbelfunktionen auf.

In den meisten Handbüchern, so auch in der Hütte finden sich die zugehörigen Tabellen und zwar oft nur die Funktionen Sin, Cos und Tang. Es sei jedoch daran erinnert, daß damit alle vier Funktionen aufgeschlagen werden können, denn es ist $\operatorname{Cotang}\varphi = \frac{1}{\operatorname{Tang}\varphi}$.

Zahlenbeispiel.

Ein Trägerstück von 300 cm Länge mit einer gleichförmig verteilten Belastung von 200 kg pro lfd. m sei an seinen Enden durch Einspannungs- bzw. Stützmomente zusätzlich auf Biegung belastet. Am linken Ende wirken 50000 kgcm, am rechten 40000 kgcm.

1. Der Träger werde außerdem in seiner Achsrichtung mit 1000 kg Druck belastet.

a) Die Endmomente mögen im gleichen Sinne wirken wie das Feldmoment, d. h. die einzelnen Durchbiegungen mögen sich addieren.

Es betragen $M_A = 50000$ kgcm; $M_B = 40000$ kgcm; $E = 150000 \frac{kg}{cm^2}$; $J = 500$ cm^4; $g = \frac{200}{100} = 2,0$ kg pro cm.

Mit diesen Zahlenwerten ergeben sich k, D_1, D_2 und $g \cdot k^2$ usw. wie folgt:

$$k^2 = \frac{EJ}{S} = \frac{150000 \cdot 500}{1000} = 75000 \text{ cm}^2; \quad k = 274 \text{ cm}.$$

$$g \cdot k^2 = 2,0 \cdot 75000 = 150000 \text{ kgcm}.$$

$$D_1 = M_A + g \cdot k^2 = 50000 + 150000 = 200000 \text{ kgcm}.$$

$$D_2 = M_B + g \cdot k^2 = 40000 + 150000 = 190000 \text{ kgcm}.$$

$$\frac{l}{k} = \frac{300}{274} = 1,09 \text{ im Bogenmaß} = 62\tfrac{1}{2}^0.$$

Die eigentliche Bedingungsgleichung ist hier:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{k} = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{1}{\sin\frac{l}{k}} - \operatorname{ctg}\frac{l}{k} = \frac{190000}{200000} \cdot \frac{1}{\sin 62\frac{1}{2}^0} - \operatorname{ctg} 62\tfrac{1}{2}^0$$

$$= \frac{0,95}{0,887} - 0,521 = 0,549.$$

$$\frac{x}{k} = 28^0\ 45' = \text{arc } 0,5; \quad x = 0,5 \cdot 274 = 137 \text{ cm}.$$

Der gefährdete Querschnitt liegt also um 13 cm von der Mitte entfernt und zwar um diesen Betrag nach dem größeren Endmoment hin verschoben. Das an dieser Stelle auftretende Größtmoment beträgt:

$$M_{max} = -\frac{D_1}{\cos\frac{x}{k}} + g \cdot k^2 = -\frac{200000}{0,877} + 150000 = 78000 \text{ kgcm}.$$

An der Stelle $x = 137$ cm vom linken Ende tritt nun infolge Gesamtbelastung folgende Durchbiegung auf:

$$y_{max} = C_1 \cdot \cos\frac{x}{k} + C_2 \cdot \sin\frac{x}{k} - g\frac{k^2}{S} - \frac{1}{S} \cdot \left(M_A + \frac{M_B - M_A}{l} \cdot x + g\frac{l}{2} \cdot x - g\frac{x^2}{2}\right).$$

Darin $C_1 = \frac{D_1}{S} = \frac{200000}{1000} = 200$

$$C_2 = \frac{1}{S} \cdot \left(\frac{D_2}{\sin\frac{l}{k}} - D_1 \cdot \operatorname{ctg}\frac{l}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{1000} \cdot \left(\frac{190000}{0,887} - 200000 \cdot 0,521\right) = 109,8.$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$y_{max} = 109,8 \cdot 0,877 + 200 \cdot 0,48 - \frac{150000}{1000}$$

$$- \frac{1}{1000} \cdot \left(40000 + \frac{10000}{300} \cdot 137 + 300 \cdot 137 - 200 \cdot 1,37 \cdot \frac{137}{2}\right)$$

$$= 24,72 \text{ cm.}$$

Es sei hier hervorgehoben, daß eine Verwechslung von D_1 und D_2 bei der Bestimmung des gefährdeten Querschnittes nur dessen Abstand vom anderen Trägerende d. h. den Ergänzungswert $300 - 137 = 163$ cm erzeugt.

b) Die Endmomente mögen im entgegengesetzten Sinne wirken wie das Feldmoment.

Hier betragen:

$D_1 = -50000 + 150000 = 100000$ kgcm.

$D_2 = -40000 + 150000 = 110000$ kgcm.

Die Bedingungsgleichung lautet hier:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{k} = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{1}{\sin\frac{l}{k}} - \operatorname{ctg}\frac{l}{k} = \frac{1,10}{0,887} - 0,521 = 0,719$$

$$\frac{x}{k} = 35\tfrac{1}{2}^0 = \text{arc } 0,618.$$

$$x = 0,618 \cdot 274 = 169 \text{ cm.}$$

Damit ergibt sich das Größtmoment:

$$M_{max} = \frac{D_1}{\cos\frac{x}{k}} + g \cdot k^2 = -\frac{100000}{0{,}814} + 150000 = 27000 \text{ kgcm.}$$

2. Der Träger werde in seiner Achsrichtung mit 1000 kg Zug belastet. Die sonstigen Belastungsverhältnisse bleiben dieselben.

a) Die Endmomente mögen im Sinne des Feldmomentes wirken.

Die Hilfswerte sind dieselben wie im ersten Falle.

$$k = \sqrt{\frac{E \cdot J}{S}} = \sqrt{\frac{150000 \cdot 500}{1000}} = 274 \text{ cm.}$$

$$k^2 = 75000 \text{ cm}^2; \quad g \cdot k^2 = 150000 \text{ kgcm.}$$

$$D_1 = M_A + g \cdot k^2 = 50000 + 150000 = 200000 \text{ kgcm.}$$

$$D_2 = M_B + g \cdot k^2 = 40000 + 150000 = 190000 \text{ kgcm.}$$

$$\frac{l}{k} = \frac{300}{274} = 1{,}09.$$

Bedingungsgleichung:

$$\operatorname{Tang}\frac{x}{k} = \operatorname{Cotang}\frac{l}{k} - \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{1}{\operatorname{Sin}\frac{l}{k}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Tang} 1{,}09} - \frac{190000}{200000} \cdot \frac{1}{\operatorname{Sin} 1{,}09} = \frac{1}{0{,}7969} - \frac{0{,}95}{1{,}3190} = 0{,}535.$$

$$\frac{x}{k} = 0{,}60; \quad x = 0{,}60 \cdot 274 = 164 \text{ cm.}$$

Damit ergibt sich das Größtmoment zu:

$$M_{max} = \frac{D_1}{\operatorname{Cos}\frac{x}{k}} + g \cdot k^2 = -\frac{200000}{1{,}1855} + 150000 = 18500 \text{ kgcm.}$$

b) Endmomente und Feldmoment mögen sich entgegen wirken.

$$D_1 = M_A + g\,k^2 = 100000 \text{ kgcm.}$$

$$D_2 = M_B + g\,k^2 = 110000 \text{ kgcm.}$$

Bedingungsgleichung:

$$\mathrm{Tang}\,\frac{x}{k} = \mathrm{Cotang}\,\frac{l}{k} - \frac{D_2}{D_1}\cdot\frac{1}{\mathrm{Sin}\,\frac{l}{k}}$$

$$= \frac{1}{0{,}7969} - 1{,}1\cdot\frac{1}{1{,}3190} = 0{,}420.$$

$$\frac{x}{k} = 0{,}45;\; x = 0{,}45\cdot 274 = 123 \text{ cm.}$$

Größtmoment:

$$M_{max} = \frac{D_1}{\mathrm{Cos}\,\frac{x}{k}} + g\cdot k^2 = -\frac{100000}{1{,}1030} + 150000 = 59000 \text{ kgcm.}$$

Gewählt war oben ein Querschnitt vom Trägheitsmoment $J = 500$ cm⁴. Bei einer angenommenen Trägerhöhe von 12 cm würde sich ein Widerstandsmoment von $W = \frac{500}{6{,}0} = 83{,}3$ cm³ ergeben. Wird der Stab gedrückt, so beträgt die größte Beanspruchung

$$\sigma_{max} = \frac{78000}{83{,}3} = 935\,\frac{kg}{cm^2}.$$

Wegen der großen Beanspruchung hauptsächlich jedoch wegen der großen Durchbiegung würde hier ein Querschnitt mit wesentlich höherem J zu wählen sein.

4. Die Deformationen des Zellenfachwerks.

Außer den lokalen Durchbiegungen der einzelnen Holmfelder erleidet das ganze Stabsystem des Zellenfachwerks dadurch eine Verzerrung, daß sich die einzelnen Knotenpunkte des Systems nach rechts oder links, nach oben oder unten verschieben.